შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 150

ამოცანა № 1

გვერდი № 1

$f: R \to R$. $\forall x, y \in R$, $f(x)+f(y) \geq 2f(x+y)$.

მოცემულობიდან გამომდინარე ყოველი $x, y, z \in R$, სამართლიანია:

$$f(x)+f(y) \geq 2\cdot f(x+y)$$
$$+\ f(x)+f(z) \geq 2\cdot f(x+z)$$
$$f(y)+f(z) \geq 2\cdot f(y+z)$$

ანუ: $2\cdot(f(x)+f(y)+f(z)) \geq 2(f(x+y)+f(y+z)+f(x+z)) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{f(x)+f(y)+f(z) \geq f(x+y)+f(y+z)+f(x+z)}$ (1).

ახლაც იგივე მოცემულობიდან გამომდინარე:

$$f(x+y)+f(z) \geq 2f(x+y+z)$$
$$+\ f(y+z)+f(x) \geq 2f(x+y+z)$$
$$f(x+z)+f(y) \geq 2\cdot f(x+y+z)$$

ანუ: $\underline{(f(x)+f(y)+f(z))+(f(x+y)+f(y+z)+f(x+z)) \geq 6\cdot f(x+y+z)}$ (2).

შევკრიბოთ (1)-ს და შევიტანოთ (2)-ში მივიღებთ:

$2\cdot(f(x)+f(y)+f(z)) \geq (f(x)+f(y)+f(z))+(f(x+y)+f(y+z)+f(x+z)) \geq$

$\geq 6\cdot f(x+y+z)$, აქედან კი გვაქვს:

$f(x)+f(y)+f(z) \geq 3\cdot f(x+y+z)$ - ყოველი $x, y, z \in R$.

რ.დ.გ.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 150

ამოცანა № 3

გვერდი № 2

$a, b, c < 2011$. $a, b, c \in N$ – $(a+b+c) \vdots a, b, c$.

განვიხილოთ 3 შემთხვევა:

ა) როცა $a=b=c$. მაშინ ცხადია $a+b+c=3a$ იყოფა a-ზე, b-ზე და c-ზე. რადგანაც $a<2011$, ამიტომ ასეთ სამეულთა ამოხსნის რაოდენობა იქნება 2010, და რადგანაც $a=b=c$, მათ გადანაცვლებათა რაოდენობაა 1. ამიტომ ამ შემთხვევაში ამოცანის პირობის დამაკმაყოფილებელი $\boxed{2010}$ დალაგებული სამეული.

ბ) როცა a, b და c-დან ორი ერთმანეთის ტოლია, ვთქვათ $a=b$ და c განსხვავებული. მაშინ რადგანაც $(a+b) \vdots c$ და $(a+c) \vdots b$, ვიღებთ რომ: $2a \vdots c$ (1) და $c \vdots a$ (2) ვთქვათ (2)-დან $c=at$. $t \in N$ და რადგანაც $a \neq c$, ამიტომ $t>1$. მაშინ ვიღებთ, რომ:
$2a \vdots at \Rightarrow 2 \vdots t$, და რადგანაც $t \in N$ და $t>1$, ამიტომ $t=2$, ანუ $c=2a$. ანუ ვიღებთ სამეულს: $(a, a, 2a)$-ცხადია ეს სამეული აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას, რადგან: $4a \vdots a$ და $4a \vdots 2a$.
რადგანაც $2a<2011 \Rightarrow a \leq 1005$. ანუ ასეთი სამეულების ამოხსნის რაოდენობაა 1005. თითოეული ასეთი სამეულის გადანაცვლებების რაოდენობაა 3. (კერძოდ: $(a;a;2a)$; $(a;2a;a)$; $(2a;a;a)$). მაშინ ამ შემთხვევაში დალაგებული სამეულების რაოდენობაა: $3 \cdot 1005 = \boxed{3015}$.

გ) ახლა კი განვიხილოთ შემთხვევა, როცა a, b და c-დან ყველა განსხვავებულია. ვთქვათ: $a+b+c=x$. და ვთქვათ ზოგადობის შეუზღუდავად $a>b>c$. მაშინ ცხადია $3a>x \Rightarrow a>\frac{x}{3}$ და რადგანაც a x-ის გამყოფია და $a<x$-ზე, რადგან $b, c>0$, ამიტომ $a=\frac{x}{2}$. მაშინ ვიღებთ, რომ $a=b+c$ (3).

$a+b \vdots c \Rightarrow 2b+c \vdots c \Rightarrow 2b \vdots c$ (4)

$a+c \vdots b \Rightarrow b+2c \vdots b \Rightarrow 2c \vdots b$ (5)

ვთქვათ უსგ$(b,c)=t$. ანუ: $b=p \cdot t$, $c=q \cdot t$. $p, q \in N$ და $p>q$.

მაშინ ვღებულობთ: $2pt \vdots qt \Rightarrow 2p \vdots q$ მაგრამ უსგ$(p,q)=1 \Rightarrow$
$2qt \vdots pt \Rightarrow 2q \vdots p$. $\Rightarrow 2 \vdots p$ და $2 \vdots q$. და $p, q \in N$ და $p>q$, ამიტომ $p=2$ და $q=1$. მაშასადამე: $b=2c$, $\Rightarrow a=3c$, ანუ ამ შემთხვევაში ვიღებთ სამეულებს: $(c;2c;3c)$. რადგანაც $3c<2011 \Rightarrow c \leq 670$, ანუ ასეთი სამეულების ამოხსნის რაოდენობაა 670. ხოლო მათ გადანაცვლებებს კი აქვს $3!=6$. ანუ ამ შემთხვევაში დალაგებული სამეულების რაოდენობაა: $6 \cdot 670 = \boxed{4020}$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 150

ამოცანა № 3

გვერდი № 3

ასე, რომ ამ 3 შემთხვევის განხილვით ჩვენ ამოვწურეთ ყველა შესაძლო შემთხვევა. ამიტომ სულ ისეთ დასაშვები სამეულების რაოდენობა, რომელიც აკმაყოფილებენ ამოცანის პირობებს იქნება:

$2010+3015+4020=\boxed{9045}$.

პასუხი: სამეულების რაოდენობაა 9045.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

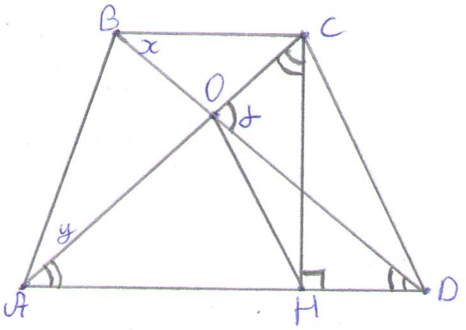
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/ 150

ამოცანა № 2

გვერდი № 4



ვთქვათ მოცემული ტრაპეციის ფუძეებია BC და AD, ხოლო ფერდები კი – AB და CD.

ვთქვათ: $BD \equiv x$, $AC \equiv y$. ხოლო დიაგონალებს შორის კუთხე კი: $\angle COD = \alpha$. მოცემულობით:

$x + y = 20$ (1) და $\frac{xy \cdot \sin\alpha}{2} = 50 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy = \frac{100}{\sin\alpha}$ (2) ($\sin\alpha \neq 0$, რადგან $\alpha \neq 0°$ და $\alpha \neq 180°$)

(1) ტოლობა ჩავსვათ (2)-ში და მივიღებთ:

$x(20 - x) = \frac{100}{\sin\alpha} \Rightarrow x^2 - 20x + \frac{100}{\sin\alpha} = 0$. $D = 400 - \frac{400}{\sin\alpha} = 400\frac{\sin\alpha - 1}{\sin\alpha}$.

რადგანაც ვიცით რომ მოცემული პირობებით ასეთი ტრაპეცია არსებობს, ამიტომ $D \geq 0$. ანუ $\sin\alpha - 1 \geq 0$, რაც მხოლოდ მაშინ სრულდება, როცა $\alpha = 90°$ (3). მაშინ მივიღებთ, რომ: $x^2 - 20x + 100 = 0 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow y = 10$.

რადგანაც $BC \parallel AD$, ამიტომ: $\angle BCO = \angle OAD$ და $\angle CBO = \angle ODA \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle BOC \sim \triangle DOA \Rightarrow \frac{BO}{OD} = \frac{CO}{OA} \Rightarrow \frac{BO}{10 - BO} = \frac{CO}{10 - CO} \Rightarrow 10 \cdot BO - \cancel{BO \cdot OC} = 10CO - \cancel{BO \cdot OC}$

ანუ $BO = OC \Rightarrow OA = OD$. $\Rightarrow \angle ODA = \angle OAD$ (4).

ამასთან COHD ოთხკუთხედი ციკლურია, რადგან $\angle COD = \angle CHD = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle HDO = \angle OCH$ (5). ხოლო (4)-დან და (5)-დან გამომდინარეობს, რომ:
$\angle CAH = \angle ACH \Rightarrow CH = AH$ (6). $\triangle AHC$ მართკუთხაა, $AH = HC$ და $AC = 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow CH = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$.

პასუხი: $CH = 5\sqrt{2}$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

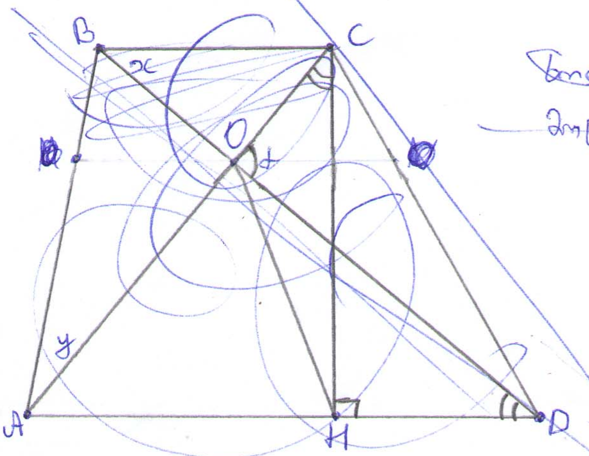
შესარჩევი ტურები მათემატიკის 52-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

17.04.2011/ მათ/ II/

ამოცანა № 2

გვერდი № 4



~~ვთქვათ ტრაპეციის დიაგონალებია x და y, ხოლო მათ შორის კუთხეა α. მაშინ მოცემულობიდან ვიღებთ:~~

$x+y=20$ (1)

$\frac{xy \cdot \sin\alpha}{2}=50 \Rightarrow xy=\frac{100}{\sin\alpha}$ ($\alpha \neq 0°$-ს) (2)

~~(1) ჩავსვათ (2)-ში და ვიღებთ:~~

$x(20-x)=\frac{100}{\sin\alpha} \Rightarrow x^2-20x+\frac{100}{\sin\alpha}=0.$

$\frac{D}{4}=100-\frac{100}{\sin\alpha}=100\left(\frac{\sin\alpha-1}{\sin\alpha}\right)$, რადგან

~~მოცემულობის თანახმად ტრაპეცია არსებობს, ამიტომ~~ $\frac{D}{4} \geq 0 \Rightarrow \sin\alpha-1 \geq 0$

~~ანუ~~ $\sin\alpha=1$ და $\alpha=90°$. (3) ~~მაშინ ვიღებთ, რომ:~~ $x^2-20x+100=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=10 \Rightarrow y=10.$

~~ოთხკუთხედ CDHO-ში~~ $\angle COD=\angle CHD=90° \Rightarrow$ CDHO ~~ჩახაზვადია, ანუ:~~

$\angle ODH=\angle OCH$ (4)

~~რადგან~~ $BC \parallel AD$, ~~ამიტომ:~~ $\angle BCO=\angle OAD$ და $\angle CBO=\angle ODA$. ~~მაშინ:~~

$\triangle BOC \sim \triangle DOA \Rightarrow \frac{BO}{OD}=\frac{CO}{OA}$, ~~ამასთან~~ $CO+OD=BO+OA$, ~~ასეთი კი შესაძლებელია მხოლოდ, რომ:~~